SEGIEMPAT SACCHERI
(Kajian Teoretik pada Geometri Non Euclid)

I Wayan Widana
Dosen Jurusan/PS. Pendidikan Matematika FPMIPA IKIP PGRI Bali
iwyn_widana@yahoo.co.id

ABSTRACT

Saccheri Quadrilateral (Theoretical Study on Non-Euclidean Geometry)

Geometry is a deductive system. As a deductive system, geometry has a base understanding (primitive concept), definitions, postulates and arguments. Non-Euclidean geometry was born as a result of the failure of a new inspiration to mathematicians prove Euclid's 5^{th} axiom of parallels. Lobachevsky and Bolyai are two characters who find Hyperbolic Geometry and Reimann is the inventor of the elliptical Geometry.

Saccheri quadrilateral is a convex quadrilateral with sides of equal length pair that is perpendicular to the side of the base. Based on theoretical studies that have been done it is concluded that: (1) Saccheri Quadrilateral on Hyperbolic Geometry has the properties: a) peak congruent angles and taper angles, b) the length of the peak is longer than the length of the base, and c) long segment connecting the midpoints of the peak and the reason was shorter than the legs of the Saccheri quadrilateral, (2) Saccheri quadrilateral on Elliptic Geometry has the properties: a) the angles are congruent peaks and obtuse angle, b) the length of the peak is less than the length of the side of its base, and c) the length of the segment connecting the midpoints of the peak and the reason is longer than the legs of the Saccheri quadrilateral.

Keywords: deductive system, hyperbolic geometry, elliptic geometry, quadrilateral Saccheri

PENDAHULUAN

Geometri merupakan salah satu cabang matematika yang mempelajari titik, garis, bidang dan benda-benda ruang serta sifat-sifatnya, ukuran-ukurannya serta hubungannya satu sama lain. Dalam perjalanannya, geometri mengalami perkembangan yang sangat pesat seiring dengan kemajuan teknologi di muka bumi ini. Geometri Euclid merupakan geometri yang pertama, dikembangkan oleh Euclides dari Aleksandria hidup kira-kira 300 tahun sebelum Masehi. Geometri ini bertahan kurang lebih selama 2000 tahun dan tidak terbantahkan, tetapi sejak abad ke 19 para matematikawan mulai menemukan kelemahan geometri Euclid. Hal inilah yang merupakan awal ditemukannya geometeri non Euclid.

Kajian ini dimaksudkan untuk memberikan wawasan yang lebih luas dan mendalam tentang segiempat Saccheri pada geometri non Euclid. Berdasarkan kajian tersebut akan tampak perbedaan konsep segiempat Saccheri secara substansial, sehingga dapat dibandingkan dan sangat menarik untuk dijadikan bahan kajian.

PEMBAHASAN

Geometri Sebagai Suatu Sistem Deduktif. Moeharti (1986) mengemukakan bahwa sebagai suatu sistem deduktif, dalam geometri harus ada pengertian-pengertian pangkal (*primitive concept*) yaitu unsur-unsur dan relasi-relasi yang tidak didefinisikan.

Selain pengertian pangkal, masih diperlukan lagi definisi-definisi dari unsur lain yang menggunakan pengertian pangkal. Dari definisi-definisi tersebut selanjutnya memungkinkan pemberian nama unsur-unsur yang terkait dengan pengertian pangkal. Untuk menetapkan suatu definisi tidak boleh ada lingkaran definisi. Suatu definisi harus *reversible*, artinya definisi hendaknya dapat dinyatakan dalam bentuk kalimat yang memuat “bila dan hanya bila”. Misalnya, suatu segitiga samasisi adalah suatu segitiga yang ketiga sisinya sama panjang. Hal ini berarti bahwa: 1) jika suatu segitiga samasisi maka ketiga sisinya sama panjang; 2) jika suatu segitiga ketiga sisinya sama panjang maka segitiga itu samasisi. Sehingga dapat dikatakan bahwa suatu segitiga disebut samasisi bila dan hanya bila ketiga sisinya sama panjang. Selain itu harus ada relasi-relasi atau pernyataan yang dapat diterima tanpa bukti yang disebut aksioma atau postulat. Relasi-relasi lainnya yang dapat dibuktikan menggunakan definisi dan aksioma atau postulat-postulat itu disebut dalil atau teorema. Proses untuk mendapatkan atau menurunkan suatu dalil dari himpunan pengertian pangkal, definisi, dan postulat disebut suatu deduksi. Jadi suatu sistem deduktif mempunyai sejumlah pengertian pangkal, definisi, postulat dan dalil-dalil.

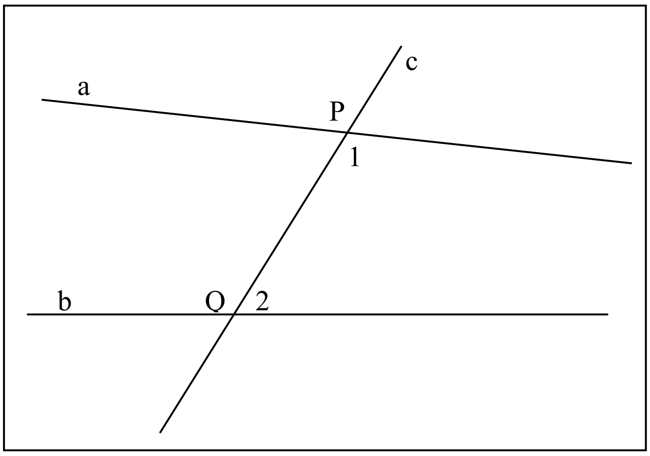
Dalam geometri sebagai suatu sistem deduktif, himpunan postulat itu dapat dipandang sebagai aturan main. Menurut Wisna (2008), himpunan postulat atau aksioma harus memenuhi 3 (tiga) syarat yaitu: 1) konsisten, artinya tidak boleh menyimpulkan suatu teorema dari aksioma-aksioma yang bertentangan dengan aksioma atau teorema yang sudah dibuktikan sebelumnya; 2) independen, artinya tidak boleh ada salah satu aksioma yang dapat diturunkan dari aksioma yang lainnya; 3) lengkap, artinya tidak mungkin untuk menambahkan suatu aksioma yang konsisten dan independen tanpa harus menambahkan pengertian pangkal yang baru.

Lahirnya Geometri Non Euclid. Geometri yang menggunakan sistem deduktif pertama kali adalah geometri Euclid dan bertahan hampir 2000 tahun. Euclid (325-265 SM), seorang matematikawan dari Aleksandria telah menulis 13 jilid buku. Dalam bukunya yang berjudul “*The Elements*” memuat 23 definisi, 5 aksioma, 5 postulat dan 48 dalil. Euclid menggunakan istilah postulat, merupakan aksioma yang khusus digunakan pada bidang geometri. Euclid sudah menggunakan sistem deduktif dalam penyusunan buku ini. Postulat yang dinyatakan oleh Euclid dinyatakan seperti berikut.

Postulat

1. Selalu dapat menarik suatu garis dari suatu titik ke suatu titik yang lain.
2. Selalu dapat membuat ruas garis tak terbatas banyaknya pada suatu garis.
3. Selalu dapat melukis suatu lingkaran berpusat di suatu titik dengan jari-jari ruas garis yang ditentukan.
4. Semua sudut siku-siku satu sama lain sama besar.
5. Jika suatu garis lurus memotong dua garis lurus dan membuat jumlah sudut-sudut dalam sepihak kurang dari dua sudut siku-siku, kedua garis itu jika diperpanjang tak terbatas akan bertemu di pihak tempat kedua sudut dalam sepihak kurang dari dua sudut siku-siku.

Keterangan postulat ke-5:



Gambar 1. Ilustrasi Postulat ke-5 Euclid

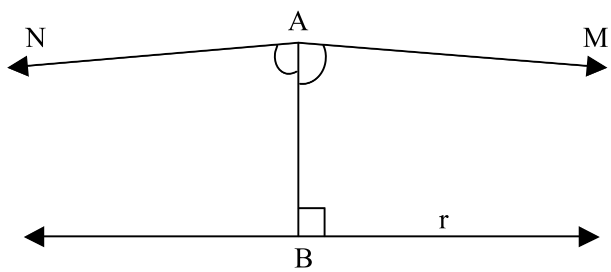
Perhatikan gambar 1 di atas!
Garis c memotong garis a dan b. Sudut P_1 ditambah sudut Q_2 kurang dari dua sudut siku-siku. Jika a dan b diperpanjang akan berpotongan di pihak tempat sudut P_1 dan sudut Q_2 (di sebelah kanan gambar di atas). Postulat ke-5 Euclid ini dikenal dengan postulat paralel.

Beberapa matematikawan menganggap bahwa postulat ke-5 itu bukan postulat dan dapat dibuktikan dengan keempat postulat lainnya. Usaha-usaha untuk membuktikan postulat ke-5 ini berlangsung sejak Euclid masih hidup sampai kira-kira tahun 1820. Namun usaha-usaha ini tidak ada yang berhasil dan tampak keunggulan Euclid. Tetapi dibalik kegagalan itu, ternyata usaha-usaha yang dilakukan oleh para matematikawan menemukan sistem geometri baru yang sekarang dikenal dengan nama **Geometri Non Euclid**. Geometri Non Euclid masih berdasarkan empat postulat pertama dari Euclid dan hanya berbeda pada postulat kelimanya. Yang termasuk dalam Geometri Non Euclid adalah **Geometri Hiperbolik** (Lobachevsky) dan **Geometri Eliptik** (Riemann).

A. Geometri Hiperbolik.

Geometri hiperbolik, pertama kali dikembangkan oleh Lobachevsky (1793-1856) dan Bolyai seorang matematikawan Austria (1775-1856) yang menaruh minat utamanya pada dasar-dasar geometri dari postulat kelima Euclid, postulat kesejajaran.

Aksioma Kesejajaran Geometri Hiperbolik



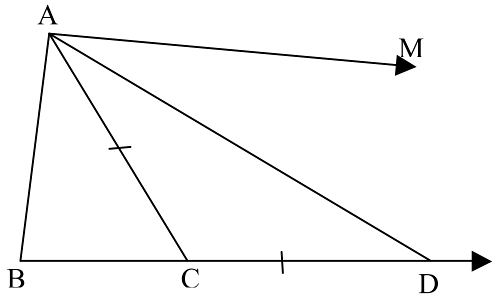
Gambar 2. Aksioma Kesejajaran Geometri Hiperbolik

Melalui suatu titik A dan suatu garis r yang tidak melalui A ada <u>lebih dari satu garis</u> melalui A dalam bidang Ar yang tidak memotong r (Moeharti, 1986). Perhatikan gambar berikut ini!

Melalui titik A ditarik garis AB⊥r. Bila sinar garis AM direfleksikan terhadap AB akan diperoleh sinar garis AN, sehingga ∠BAM=∠BAN dan keduanya lancip yang selanjutnya oleh Lobachevsky disebut sebagai **sudut kesejajaran** (*angle of pararellisme*).

Segitiga Asimtotik

Misalkan AM dan BM adalah sinar garis-sinar garis yang sejajar, dan ε merupakan sudut kecil sembarang.



Gambar 3. Segitia Asimtotik

Dalam sudut BAM ditarik suatu sinar garis dari A yang dengan AM membentuk sudut yang lebih kecil dari ε. Misalkan sinar garis ini memotong BM di titik C. Pada CM diambil suatu titik D sedemikian sehingga CD=CA. Dalam segitiga samakaki CAD terdapat ∠CAD=∠CDA, sehingga:

∠CAD < ∠CAM < ε;

∠CDA < ∠CAM < ε;

∠BDA < ∠CAM < ε;

Jika BD menuju ke tak terhingga sedemikian sehingga AD mendekati AM, maka ∠BDA mendekati nol.

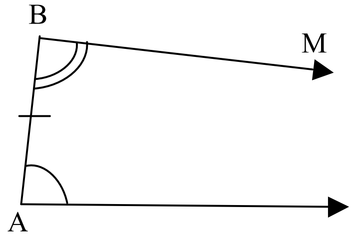
Dalil 1

Jika dua garis sejajar dipandang sebagai berpotongan di jauh tak hingga, sudut pada titik potongnya harus sama dengan nol.

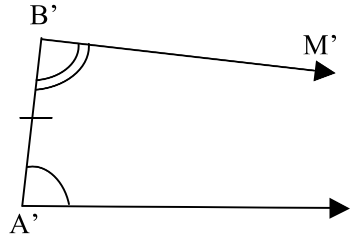
Jika AM dan BM sinar-sinar sejajar, maka bangun ABM disebut **segitiga asimtotik**. Segitiga-segitiga semacam ini sifat-sifatnya hampir sama dengan segitiga berhingga. Dua segitiga asimtotik disebut <u>kongruen</u>, jika sisi-sisi yang berhingga dan salah satu sudutnya sama.

Dalil 2

Jika dua segitiga ABM dan A'B'M' mempunyai AB=A'B' dan ∠A=∠A' maka juga ∠B=∠B'.



Gambar 4a. Segitiga Asimtotik (i)



Gambar 4b. Segitiga Asimtotik (ii)

AB=A'B' dan ∠A=∠A', maka dapat dibuktikan ∠B=∠B'.

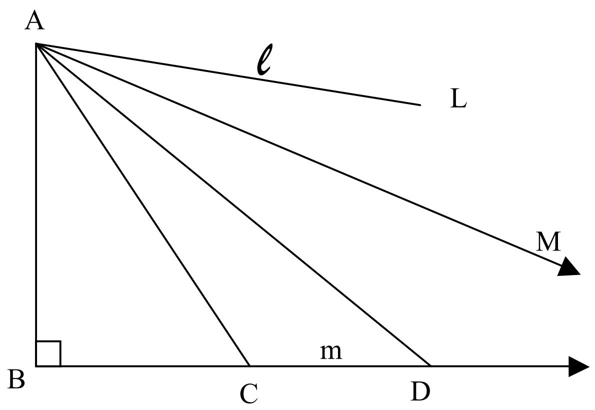
Bukti:

Andaikan bahwa ∠B≠∠B', berarti bahwa salah satu lebih besar daripada yang lain misalnya ∠B > ∠B'. Dengan demikian melalui B' dapat dibuat sinar garis B'M'' sedemikian sehingga ∠A'B'M"=∠B dan B'M"//A'M'. Maka di B' terdapat dua sinar garis B'M' dan B'M" yang sejajar dengan A'M'. Hal ini tidak mungkin, berarti pengandaian salah sehingga haruslah ∠B=∠B'.

Dalil 3

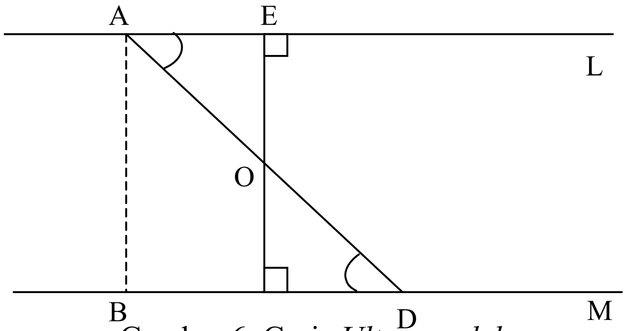
Jika dua garis tidak berpotongan dan tidak sejajar, mereka mempunyai garis tegak lurus persekutuan.

Bukti:



Gambar 5. Garis Tegak Lurus Persekutuan

Misalkan A suatu titik pada garis pertama l atau AL. Dari A ditarik garis tegak lurus pada garis kedua m, yaitu AB. Jika AB tidak tegal lurus AL, maka dapat diandaikan ∠BAL lancip. Karena garis AL dan BM tidak berpotongan dan tidak sejajar, maka ada sudut yang lebih kecil yaitu ∠BAM sedemikian sehingga AM sejajar dengan BM. Misalkan BCD pada garis BM, maka segitiga ACD sudut dalam di D lebih kecil daripada sudut luar di C atau ∠ADB < ∠ACB. Jika BD diperpanjang ke tak hingga, maka ∠ADB turun menjadi nol. Sedangkan ∠DAL turun dari ∠BAL ke ∠MAL. Pada saat D di B, maka ∠ADB > ∠DAL yaitu ∠ ADB siku-siku dan ∠DAL lancip. Sedangkan pada saat D di M, maka ∠ADB < ∠DAL yaitu ∠ADB=0 dan ∠DAL positif. Jadi pada pergeseran D dari B ke M semula ∠ADB > ∠DAL akhirnya ∠ADB < ∠DAL. Maka ada letak D antara B dan M sedemikian sehingga ∠ADB = ∠DAL. Untuk titik D yang demikian diambil titik O sebagai titik tengah AD, dari O ditarik garis EF tegak lurus tegak lurus BD, sehingga terdapat dua buah segitig yaitu segitiga ODF kongruen dengan segitiga OAE. Jadi EF tidak hanya tegak lurus BD tetapi juga tegak lurus AL. Maka EF adalah garis tegak lurus persekutuan dari AL dan BM (terbukti). Garis-garis yang tidak berpotongan dan tidak sejajar disebut ***garis ultraparalel*** atau ***hyperparalel***. Perhatikan gambar di bawah ini.

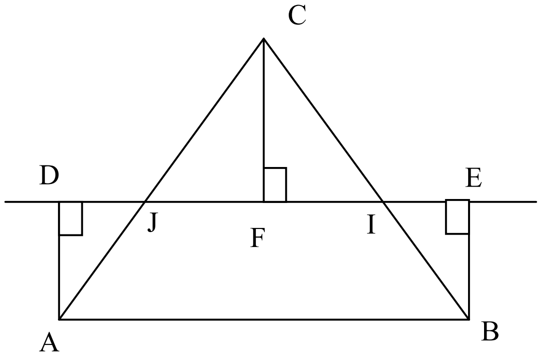


Gambar 6. Garis *Ultraparalel*

Dalil 4:

Jumlah besar sudut-sudut suatu segitiga kurang dari dua sudut siku-siku.

Bukti:



Gambar 7. Jumlah Besar Sudut Segitiga

Suatu segitiga tidak mungkin mempunyai dua sudut siku-siku atau dua sudut tumpul. Misalnya ABC suatu segitiga dengan A dan B lancip. Titik tengah AC dan BC disebut berturut-turut J dan I. Ditarik AD, BE dan CF tegaklurus garis IJ. Terdapatlah Δ CFI.

AD=CF=BE

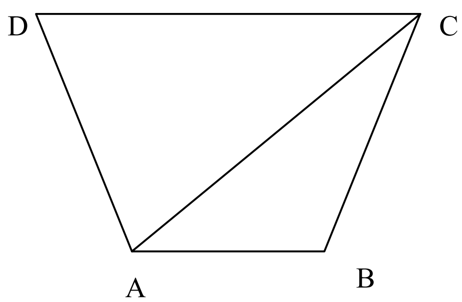
∠ACB=∠JCF+∠FCI=∠JAD+∠EBI

Jumlah sudut-sudut Δ ABC ialah:

∠BAC+∠ACB+∠CBA=∠BAJ+∠JAD+∠EBI+∠IBA=∠BAD+∠ABE.

Selanjutnya segiempat ABED disebut **Segiempat Saccheri**. Pada segiempat Saccheri ABED, maka ∠BAD dan ∠ABE keduanya lancip, sehingga jumlah besar sudut-sudut ΔABC kurang dari dua sudut siku-siku, (Moeharti, 1986).

Akibat:

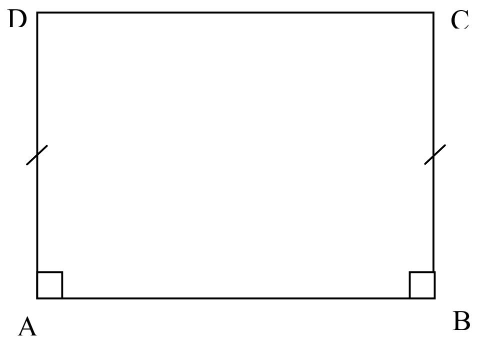


Gambar 8. Sudut-Sudut Segiempat

Perhatikan gambar 2 di atas, segiempat ABCD dapat dibangun dari dua buah segitiga ABC dan segitiga ACD, sehingga jumlah sudut-sudut segiempat merupakan jumlah sudut-sudut segitiga yang membentuknya. Berdasarkan dalil di atas, dinyatakan bahwa jumlah besar sudut-sudut suatu segitiga kurang dari dua sudut siku-siku. Sehingga jumlah sudut-sudut segiempat dalam geometri hiperbolik kurang dari 360^0.

Segiempat Saccheri pada Geometri Hiperbolik.

Pada dasarnya geometri hiperbolik tetap menggunakan 4 postulat Euclid, hanya berbeda pada postulat ke-5 yaitu menggunakan aksioma kesejajaran: melalui suatu titik A dan suatu garis r yang tidak melalui A ada lebih dari satu garis melalui A dalam bidang Ar yang tidak memotong r. Dalam geometri hiperbolik dikenal sebuah bangun yang dinamakan **segiempat Saccheri**. Segiempat Saccheri adalah segiempat konveks dengan sepasang sisi sama panjang yang tegak lurus terhadap sisi alasnya.

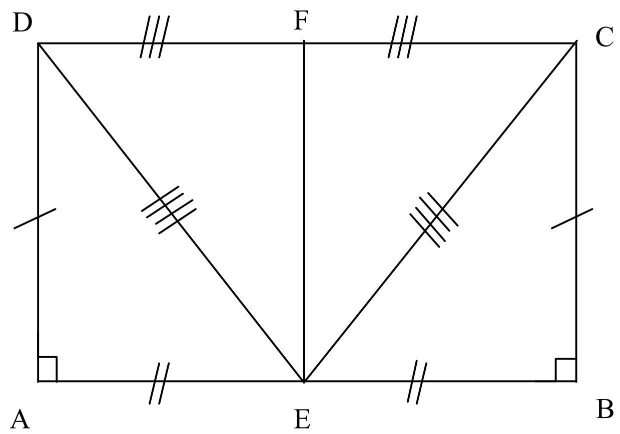


Gambar 9. Segiempat Sacceri

Berikut ini akan dibuktikan sifat-sifat segiempat Saccheri ABCD pada geometri hiperbolik, dengan AB adalah sisi alas, AD dan BC adalah sepasang sisi yang sama panjang dan tegak lurus AB, serta $\angle ADC$ dan $\angle BCD$ adalah sudut puncak segiempat Saccheri. Akan dibuktikan bahwa segiempat Saccheri ABCD memiliki sifat-sifat sebagai berikut. Perhatikan gambar berikut!

1) $\angle ADC \cong \angle BCD$ dan lancip.
2) Sisi CD lebih panjang daripada AB.
3) Panjang segmen yang menghubungkan titik-titik tengah dari puncak dan alas kurang dari kaki-kakinya.

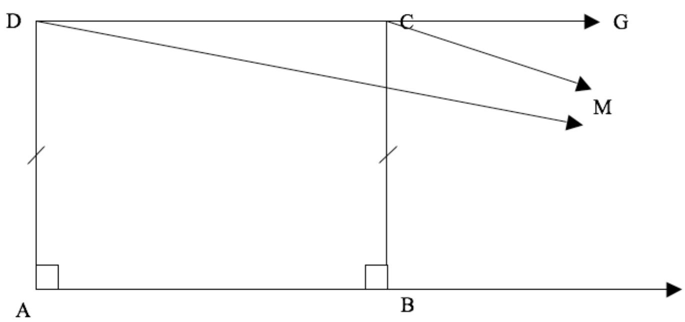
Bukti:



Gambar 10. Sifat-Sifat Segiempat Sacceri

Gambar 10 memperlihatkan segiempat Saccheri dengan titik E adalah titik tengah AB dan F adalah titik tengah CD, sehingga AE=EB dan CF=FD. Melalui titik C dan D dibuat segmen garis yang melalui E, sehingga terbentuk segmen garis CE dan DE. Sifat-sifat segiempat Saccheri pada Geometri Hiperbolik dapat dibuktikan sebagai berikut.

1) Akan dibuktikan bahwa: $\angle ADC \cong \angle BCD$ dan lancip
   AE=BE (E titik tengah AB)
   AD=BC (definisi segiempat Saccheri)
   $\angle EAD = \angle EBC = 90^0$ (definisi segiempat Saccheri)
   Sehingga $\Delta EAD \cong \Delta EBC$ (s, sd, s)
   Akibatnya $\angle ADE = \angle BCE$ ....(1)
   DF=CF (F titik tengah CD)
   CE=DE (karena $\Delta EAD \cong \Delta EBC$)
   EF=EF (berimpit)
   Sehingga $\Delta FDE \cong \Delta FCE$ (s, sd, s)
   Akibatnya $\angle FCE = \angle FDE$ ....(2)
   Dari (1) dan (2) diperoleh:
   $\angle ADE + \angle FDE = \angle FCE + \angle BCE$
   Sehingga $\angle ADC = \angle BCD$.
   Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\angle ADC$ dan $\angle BCD$ lancip.
   Perhatikan gambar berikut!



Gambar 11. Sudut-Sudut Lancip

   AD=BC (segiempat Saccheri)
   $\angle DAM = \angle CBM = 90^0$ (segiempat Saccheri). Akibatnya:
   $\Delta DAM \cong \Delta\ CBM$ (segitiga asimtotik, dalil 2 di atas), sehingga
   $\angle ADM = \angle BCM$
   $\angle ADM + \angle GDM < \angle BCM + \angle GCM$
   $\angle ADC < \angle BCG$
   Padahal $\angle BCD = \angle ADC$ jadi $\angle BCD < \angle BCG$
   Karena $\angle BCD + \angle BCG < 180°$ ..(1)
   dan $\angle BCD - \angle BCG < 0°$ ....(2)
   Jika (1) dan (2) dijumlahkan akan diperoleh: $2\angle BCD < 180°$.
   Sehingga $\angle BCD = \angle ADC < 90°$
   Dengan demikian maka $\angle BCD \cong \angle ADC$ lancip, atau sudut-sudut puncak segiempat Saccheri pada Geometri Hiperbolik ini adalah kongruen dan lancip (***terbukti***).

2) Sisi CD lebih panjang daripada AB.
   Akan dibuktikan CD>AB. Perhatikan kembali gambar 10 di atas!
   Misalkan CD=AB, maka FC=EB. Pada pembuktian sebelumnya telah terbukti bahwa $\Delta DEF \cong \Delta CEF$, oleh karena itu maka sudut-sudut yang bersesuaian besarnya sama, sehingga $\angle CFE = \angle DFE$. Karena $\angle CFE + \angle DFE = 180°$ dan $\angle CFE = \angle DFE$, maka $\angle CFE = 90°$. EC merupakan sisi persekutuan ΔCFE dan ΔEBC, maka $\Delta CFE \cong \Delta EBC$ sehingga diperoleh $\angle FEC = \angle BCE$, dan $\angle FCE = \angle BEC$. Selanjutnya $\angle FCE + \angle BEC = \angle BCE + \angle FCE$

atau ∠FEB = ∠FCB = 90°. Hal ini bertentangan dengan yang telah dibuktikan bahwa ∠FCB lancip. Jadi tidak mungkin FC=EB. Dari gambar 10 dapat dilihat segiempat BCFE dengan menggunakan kesejajaran dua garis ∠EBC = ∠BEF = ∠CFE = 90°, dan ∠C lancip, maka FC > EB , atau CD > AB (***terbukti***).

3) Panjang segmen yang menghubungkan titik-titik tengah dari puncak dan alas kurang dari kaki-kakinya.

   Perhatikan kembali gambar 10 di atas! Selanjutnya akan dibuktikan EF < BC. Perhatikan ∆EFC dan ∆ EBC. Misalkan EF = AD = BC, ∠EFC = ∠EBC = 90° (sudah dibuktikan sebelumnya). EC=EC (berimpit). Maka ∆EFC≅ ∆ EBC (sd, s, s).

   Sehingga ∠FCE + ∠BCE = ∠BEC + ∠CEF atau ∠FEB = ∠FCB = 90°. Hal ini bertentangan dengan pembuktian yang telah dilakukan sebelumnya bahwa ∠FCB lancip, sehingga pemisalan salah. Jadi tidak mungkin EF=AD=BC. Karena segiempat Saccheri BCFE pada gambar 10 di atas menggunakan kesejajaran dua garis ∠EBC=∠BEF=∠CFE= 90°, dan ∠BCD lancip, maka EF < BC dan EF < AD (***terbukti***).

B. Geometri Eliptik

Geometri eliptik dikembangkan oleh Reimann (1826-1866) seorang matematikawan kebangsaan Jerman. Ia mulai dengan asumsi bahwa: garis-garis adalah tidak terbatas, tetapi panjangnya berhingga. Reimann tidak mengindahkan postulat kesejajaran baik dari Euclid maupun Geomteri Hiperbolik. Geometri Reimann banyak digunakan dalam matematika dan fisika terapan (*Applied Mathematics and Physics*) dan merupakan dasar matematika dari Teori Relativitas Einstein.

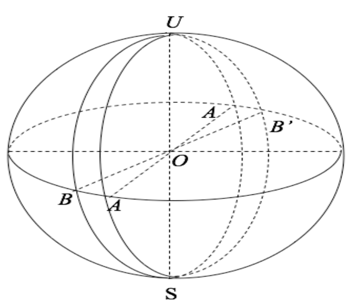
Postulat Reimann

Tidak ada garis-garis yang sejajar dengan garis lain.

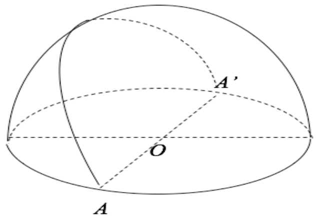
Berdasarkan pada Postulat di atas, pada Geometri Eliptik ini dua garis selalu berpotongan dan tidak ada dua garis sejajar. Hal ini akan menimbulkan dua kemungkinan, yaitu:

1. Setiap garis berpotongan pada satu titik dan tidak ada garis yang memisahkan suatu bidang. Kemungkinan ini menghasilkan ***Geometri Single Elliptic***.
2. Setiap garis berpotongan pada dua titik dan setiap garis yang memisahkan suatu bidang. Kemungkinan ini menghasilkan ***Geometri Double Elliptic.***

Berikut ini disajikan model *Geometri Double Elliptic* adalah sebuah bola dan *Geometri Single Elliptic* adalah setengah bola.



Gambar 12. Model Geometri Eliptik Ganda



Gambar 13. Model Geometri Eliptik Tunggal

Dua garis berpotongan tepat pada dua titik, dan setiap garis memisahkan bidang menjadi 2 setengah bidang.

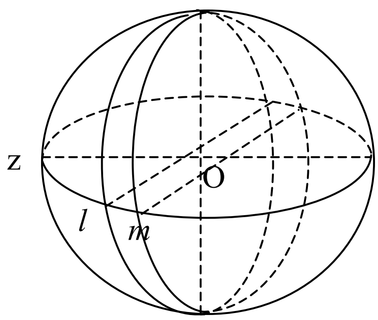
Dua garis yang berpotongan tepat pada satu titik, tetapi tidak ada garis yang memisahkan bidang menjadi 2 setengah bidang. Dua titik yang diametral dianggap sebagai 1 titik (A=A').

Dalil pada Geometri Eliptik

Dalil 1

Dua garis yang tegak lurus pada suatu garis bertemu pada suatu titik.

Bukti**:**



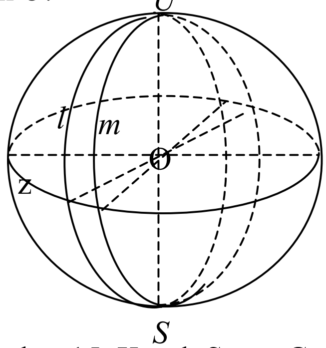
Gambar 14. Garis-garis Tegak Lurus

Perhatikan gambar 14 di atas! Andaikan garis $l \perp$ garis z dan garis $m \perp$ garis z, dengan garis l dan garis m tidak bertemu pada suatu titik. Akibatnya, Garis l dan m sejajar. Maka terjadi kontradiksi dengan postulat kesejajaran Riemann. Jadi, garis l dan garis m yang tegak lurus garis z bertemu pada suatu titik U.

Dalil 2

Semua garis tegak lurus pada suatu garis berpotongan pada titik yang disebut kutub dari garis itu dan sebaliknya setiap garis melalui kutub suatu garis tegak lurus pada garis itu.

Bukti:



Gambar 15. Kutub Suatu Garis

(i) Semua garis tegak lurus pada suatu garis berpotongan pada titik yang disebut kutub dari garis itu.
Bukti:

Perhatikan gambar 15 di atas! Misalkan dibuat 2 garis yaitu m dan l yang $\perp$ dengan garis z. Berdasarkan dalil 1, garis l dan m bertemu pada suatu titik misal U. Titik U terletak di luar garis

z. Melalui Titik U dibuat garis yang $\perp$ garis z. Maka titik U disebut kutub.

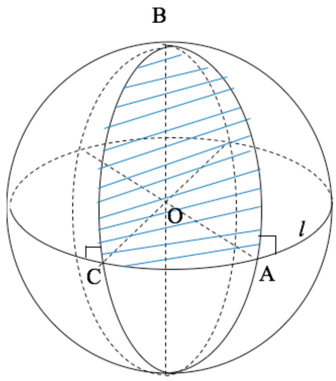
(ii) Setiap garis melalui kutub suatu garis tegak lurus pada garis itu.
Bukti:
Sebelumnya telah diketahui titik U merupakan kutub dan garis z di luar titik U. Berdasarkan sifat kutub, setiap garis yang menghubungkan titik U dengan suatu titik pada z maka garis-garis tersebut $\perp$ pada z.

Bukti:

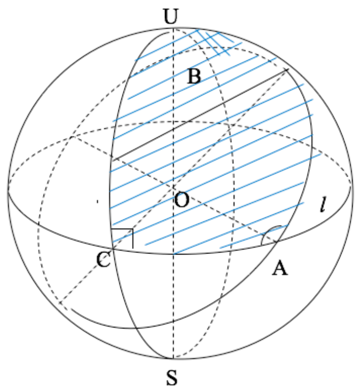
Jadi, dari bukti (i) dan (ii) dapat disimpulkan semua garis tegak lurus pada suatu garis berpotongan pada titik yang disebut kutub dari garis itu dan sebaliknya setiap garis melalui kutub suatu garis tegak lurus pada garis itu.

Dalil 3

Jumlah besar sudut-sudut segitiga lebih besar dari $180°$.



Gambar 16. $\angle A = 90°$, karena BC = jarak polar



Gambar 17. $\angle A > 90°$, karena BC > jarak polar

Pada gambar 16:
$\angle A = 90°, \angle C = 90°, \angle B$ positif . Sehingga $\angle A + \angle B + \angle C \geq 180°$
Pada gambar 17:
$\angle C = 90°$, $\angle A$ tumpul. Sehingga $\angle A + \angle B + \angle C > 180°$.

Dalil 4

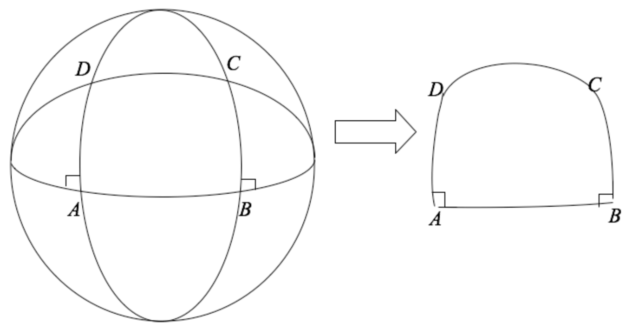
Jumlah besar sudut-sudut segiempat lebih besar dari $360°$.

Bukti:

Suatu segiempat dapat dibuat dari 2 segitiga. Berdasarkan dalil 3 jumlah besar sudut-sudut suatu segitiga lebih besar dari $180°$. Maka jelaslah jumlah besur sudut-sudut dua segitiga lebih besar dari $360°$, dari hal tersebut diperoleh jumlah besar sudut-sudut segiempat lebih besar dari $360°$.

Segiempat Saccheri pada Geometri Eliptik.

Diberikan segiempat Saccheri ABCD dengan sisi alas AB dengan sepasang sisi AD dan BC sama panjang yang tegak lurus terhadap sisi AB.



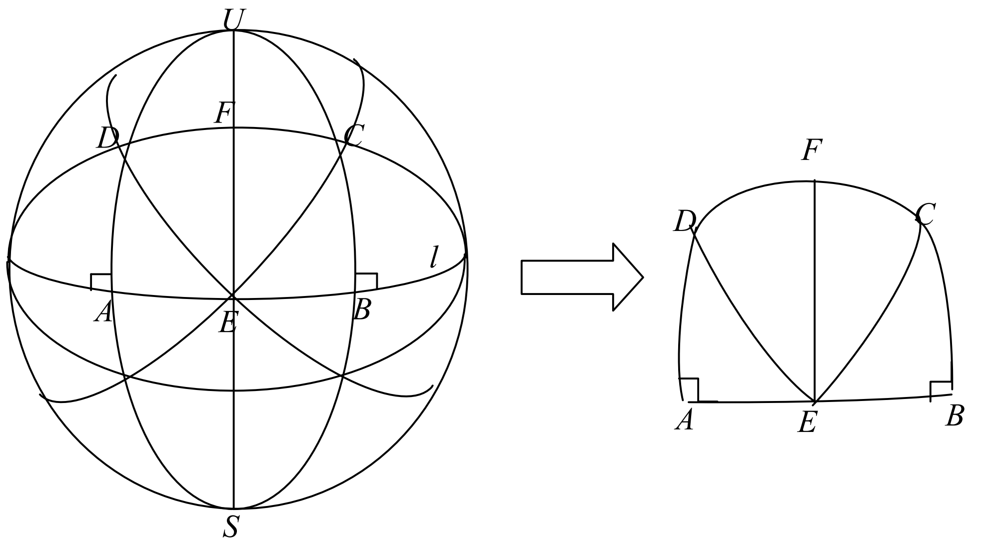
Gambar 18. Segiempat Saccheri pada Geometri Eliptik

Dari gambar 18 di atas akan dibuktikan sifat-sifat segiempat Saccheri pada Geometri Eliptik sebagai berikut.

1) Sudut-sudut puncak ∠ADC ≅ ∠BCD dan sudutnya tumpul.
2) Panjang sisi puncak CD kurang dari panjang sisi alas AB.
3) Panjang segmen yang menghubungkan titik-titik tengah dari puncak dan alasanya lebih panjang daripada kaki-kaki segiempat Saccheri tersebut.

Bukti :

1) Sudut-sudut puncak ∠ADC≅∠BCD dan sudutnya tumpul.
    (i) Sudut–sudut puncak sama (∠ADC = ∠BCD).



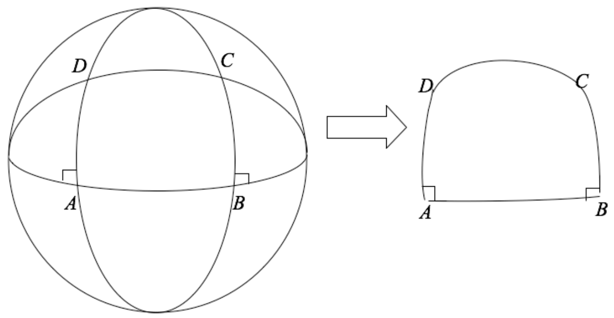
Gambar 19. Sifat-Sifat Segiempat Saccheri pada Geometri Eliptik

Perhatikan gambar 19 di atas!
AD=BC dan $\angle DAE = \angle CBE = 90°$ (definisi segiempat Saccheri).
Akan ditunjukkan $\angle ADC \cong \angle BCD$. Misalkan titik E dan F sebagai titik tengah AB dan CD sehingga AE=EB, dan DF=FC. Dibuat garis yang menghubungkan titik *U*, *F*, *E* dan *S* sehingga terbentuk FE. Kemudian buat garis yang melalui titik D dan E, serta garis yang melalui titik *C* dan *E* sehingga terbentuk DE dan CE.
Perhatikan ΔADE dan ΔBCE. Karena AD=BC, ∠DAE=∠CBE, dan AE=EB maka $\Delta ADE \cong \Delta BCE$ (s, sd, s). Akibatnya,
∠ADE=∠BCE.......................(1)

Selanjutnya, pandang ΔDEF dan ΔCEF. Karena $\Delta ADE \cong \Delta BCE$ maka DE=CE, EF=EF (berimpit), maka $\Delta DEF \cong \Delta CEF$ (s, s, s).

Akibatnya,
∠EDF=∠ECF.............................. (2)
Dari langkah (1) dan (2) diperoleh:
∠ADE+∠EDF=∠BCE+∠ECF
Jadi, ∠ADC=∠BCD (terbukti)

(ii) Sudut puncaknya tumpul



Gambar 20. Segiempat Saccheri pada Geometri Eliptik

Perhatikan gambar 20 di atas! AD=BC dan $\angle DAE = \angle CBE = 90°$ (definisi segiempat Saccheri). Akan ditunjukkan ∠ADC=∠BCD > 90^0. Berdasarkan dalil 4 di atas maka:

$$\angle DAB + \angle CBA + \angle ADC + \angle BCD > 360°$$
$$\Leftrightarrow 90° + 90° + \angle ADC + \angle BCD > 360°$$
$$\Leftrightarrow 180° + \angle ADC + \angle BCD > 360°$$
$$\Leftrightarrow \angle ADC + \angle BCD > 180°$$
$$\Leftrightarrow \angle BCD + \angle BCD > 180°$$
$$\Leftrightarrow \angle BCD > 90° \text{ (terbukti).}$$

Jadi, dari bukti (i) dan (ii) dapat disimpulkan bahwa sudut-sudut puncak ∠ADC ≅ ∠BCD dan sudutnya tumpul.

2) Panjang sisi puncak CD kurang dari panjang sisi alas AB.
Bukti:
Perhatikan kembali gambar 19 di atas!
AD=BC dan $\angle DAB = \angle CBA = 90°$ (definisi segiempat Saccheri). Akan ditunjukkan CD < AB.
Misalkan CD=AB dan titik E dan F sebagai titik tengah AB dan CD, sehingga AE=EB dan DF=FC. Maka AE=EB=DF=FC.
Perhatikan ΔADE dan ΔBCE:
AD=BC, ∠DAE=∠CBE, AE=EB, sehingga $\Delta ADE \cong \Delta BCE$. Akibatnya DE=CE.
Perhatikan ΔDEF dan ΔCEF:
DE=CE, DF=FC dan EF=EF. Karena $\Delta DEF \cong \Delta CEF$, maka ∠DFE=∠CFE, sehingga ∠DFE+∠CFE=180^0 (sudut suplementer). Jadi ∠CFE=90^0.

Perhatikan ΔCEF dan ΔBCE:
FC=EB, ∠CFE=∠CBE, dan CE=EC maka ΔCEF ≅ ΔBCE. Akibatnya, ∠FEC=∠BCE dan ∠FCE=∠BEC.
$\angle FCE + \angle BEC = \angle BCE + \angle FCE$
$\Leftrightarrow \angle FEB = \angle FCB$. Telah dibuktikan di atas $\angle FEB = 90°$ maka $\angle FCB = 90°$.
Hal ini bertentangan dengan yang telah dibuktikan bahwa $\angle FCB$ tumpul. Jadi tidak mungkin EB=FC. Dari gambar di atas perhatikan bahwa segiempat BCFE dengan menggunakan kesejajaran dua garis $\angle EBC = \angle BEF = \angle CFE = 90°$, dan $\angle BCF$ tumpul, maka FC<EB atau CD<AB (terbukti).

3) Panjang segmen yang menghubungkan titik-titik tengah dari

puncak dan alasanya lebih panjang daripada kaki-kaki segiempat Saccheri tersebut.

Bukti:

Perhatikan kembali gambar 19 di atas! AD=BC dan $\angle DAB = \angle CBA = 90°$ (definisi segiempat Saccheri). Akan ditunjukkan EF>BC.

Misalkan EF=BC dan titik E dan F sebagai titik tengah AB dan CD, sehingga AE=EB dan DF=FC. Maka AE=EB=DF=FC.

Perhatikan ΔADE dan ΔBCE:
AD=BC, ∠DAE=∠CBE, AE=EB, sehingga $\Delta ADE \cong \Delta BCE$. Akibatnya DE=CE.

Perhatikan ΔDEF dan ΔCEF:
DE=CE, DF=FC dan EF=EF. Maka $\Delta DEF \cong \Delta CEF$, akibatnya ∠DFE=∠CFE. sehingga ∠DFE+∠CFE=180^0 (sudut suplementer). Jadi ∠CFE=90^0.

Perhatikan ΔCEF dan ΔBCE:

FC=EB, ∠CFE=∠CBE, dan CE=EC maka ΔCEF ≅ ΔBCE. Akibatnya, ∠FEC=∠BCE dan ∠FCE=∠BEC.
$\angle FCE + \angle BEC = \angle BCE + \angle FCE$
$\Leftrightarrow \angle FEB = \angle FCB$. Telah dibuktikan di atas $\angle FEB = 90°$ maka $\angle FCB = 90°$.
Hal ini bertentangan dengan yang telah dibuktikan bahwa $\angle FCB$ tumpul. Jadi tidak mungkin EB=FC. Dari gambar di atas lihat segiempat BCFE dengan menggunakan kesejajaran dua garis $\angle EBC = \angle BEF = \angle CFE = 90°$, dan $\angle BCF$ tumpul, maka EF>BC (terbukti).

PENUTUP

Berdasarkan kajian teoretik di atas dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut.

1. Segiempat Saccheri adalah segiempat konveks dengan sepasang sisi sama panjang yang tegaklurus terhadap sisi alasnya.
2. Segiempat Saccheri pada Geometri Hiperbolik memiliki sifat-sifat: a) sudut-sudut puncak kongruen dan sudutnya lancip, b) panjang sisi puncaknya lebih panjang daripada panjang sisi alasnya, dan c) panjang ruas garis yang menghubungkan titik-titik tengah dari puncak dan alasanya lebih pendek dari kaki-kaki segiempat Saccheri tersebut.
3. Segiempat Saccheri pada Geometri Eliptik memiliki sifat-sifat: a) sudut-sudut puncak kongruen dan sudutnya tumpul, b) panjang sisi puncaknya kurang dari panjang sisi alasnya, dan c) panjang ruas garis yang menghubungkan titik-titik tengah dari puncak dan alasanya lebih panjang daripada kaki-kaki segiempat Saccheri tersebut.

Daftar Rujukan

Adler, CF. 1967. *Modern Geometry*. New York. Mc. Graw Hill Book Company.

Agustina, Ika. 2012. Segiempat Saccheri dan Segiempat Lambert pada Geometri Eliptik (*Makalah Tidak Dipublikasikan*). Singaraja. Universitas Pendidikan Ganesha.

Coxeter, HSM. 1967. *Intorduction to Geometry*. New York. John Wiley and Sons, Inc.

Moeharti. 1986. *Sistem-Sistem Geometri*. Jakarta. Karunika

Prayoga, T. 2011. Perbandingan Segiempat Saccheri Pada Geometri Euclid Dan Geometri Non Euclid (*Skripsi Tidak Dipublikasikan*). Yogyakarta. Universitas Negeri Yogyakarta

Wisna Ariawan. 2008. *Bahan Ajar Geometri Bidang*. Singaraja. Universitas Pendidikan Ganesha.